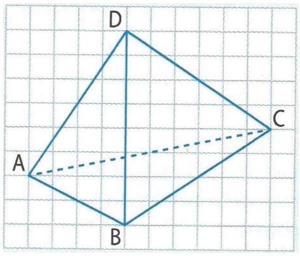
11. Exercices d'entraînement et de préparation au DS

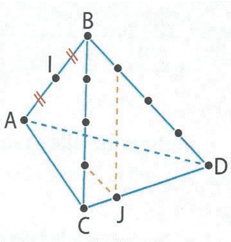
Exercice 4.A $ABCD$ est un tétraèdre représenté en perspective ci-dessous.



Placer les points R et S définis par :

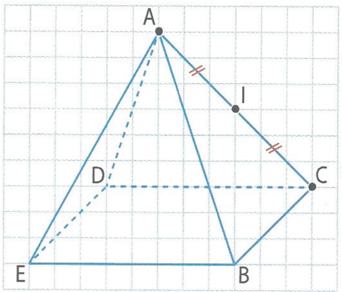
1. $\vec{DR} = \frac{1}{4}\vec{DB}\frac{3}{2}\vec{DC}$
2. $\vec{AS} = \frac{6}{5}\vec{AC} + \vec{BD}$

Exercice 4.B $ABCD$ est un tétraèdre. On appelle I le milieu de $[AB]$ et J un point sur $[CD]$.



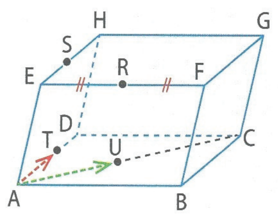
1. A l'aide des graduations marquée par des points sur la figure, qui seront supposées régulières, exprimer $\vec{BJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BD}$.
2. Exprimer le vecteur $\vec{IB}$ en fonction de $\vec{AB}$.
3. En déduire une expression de $\vec{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.

Exercice 4.C $ABCDE$ est une pyramide de sommet A et de base le parallélogramme $BCDE$. On appelle I le milieu de $[AC]$.
On appelle I le milieu de $[AC]$.



1. Placer le point G défini par $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$.
2. Exprimer $\vec{EG}$ en fonction des vecteurs $\vec{AE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
3. Exprimer $\vec{EI}$ en fonction des vecteurs $\vec{AE}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$.
4. En déduire que les points E, I et G sont alignés.

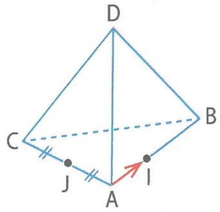
Exercice 4.D $ABCDEFGH$ est un parallélépipède. R est le milieu de $[EF]$ et S est le milieu de $[EH]$. Les points T et U sont définis par les égalités vectorielles : $\vec{AT} = \frac{2}{3}\vec{AD}$ et $\vec{AU} = \frac{1}{3}\vec{AC}$.



1. Exprimer les vecteurs $\vec{TU}$, $\vec{TR}$ et $\vec{TS}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AE}$.

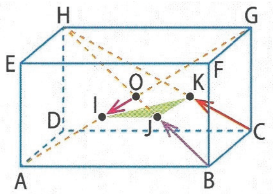
2. Calculer $9\vec{TU} + 6\vec{TS}$
3. En déduire que les vecteurs $\vec{TU}$, $\vec{TR}$ et $\vec{TS}$ sont coplanaires.
   Que peut-on en déduire pour les points T, U, R et S ?

Exercice 4.E $ABCD$ est un tétraèdre. Le point I est défini par $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et le point J est le milieu du segment $[AC]$.



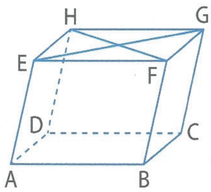
1. Démontrer que les droites (IJ) et (BC) sont sécantes.
2. En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontrer que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.

Exercice 4.F $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle de centre O. On définit les points I, J et K par les égalités vectorielles : $\vec{OI} = \frac{1}{3}\vec{OA}$; $\vec{BJ} = \frac{2}{3}\vec{BO}$; $\vec{CK} = \frac{1}{3}\vec{CH}$.



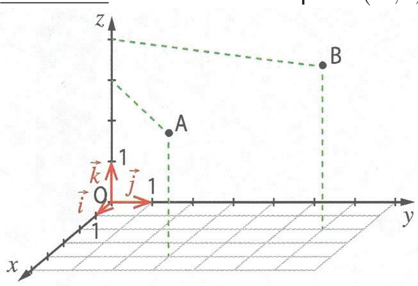
1. Démontrer que les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
2. (a) Exprimer $\vec{BJ}$ en fonction de $\vec{BH}$
   (b) Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.

Exercice 4.G On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$ ci-dessous.



1. Décomposer les vecteurs $\vec{EG}$ et $\vec{OH}$ dans la base $(\vec{EF}, \vec{EH})$.
2. Décomposer les vecteurs $\vec{BH}$ et $\vec{AO}$ dans la base $(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

Exercice 4.H Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on a représenté les points A et B.



1. Lire graphiquement les coordonnées de ces points dans le repère.
2. Déterminer les coordonnées du vecteurs $\vec{AB}$
3. Déterminer deux représentations paramétriques différentes de la droite (AB) dans ce repère.

Exercice 4.I On considère le droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Le point $A(3;5;-2)$ appartient-il à la droite d ?
2. Donner les coordonnées d'un point de d, ainsi que celles d'un vecteurs directeur $\vec{u}$ de d.
3. d est-elle parallèle à la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 6 + 2k \\ y = 1 - 6k \\ z = -5 - 2k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$?

Exercice 4.J Soient d et d' les droites de représentations paramétriques respectives :
$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$, avec $t \in \mathbb{R}$
$\begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 + k \\ z = 2 - 5k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$
Démontrer que ces deux droites sont sécantes en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 4.K L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les points $A(2;-1;4)$, $B(6;-7;0)$, $C(1;0;1)$ et $D(13;-16;5)$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.
2. Démontrer que les points A, B, C et D sont coplanaires.

Exercice 4.L Dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, soient les vecteurs $\vec{u}\begin{vmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{vmatrix}$, $\vec{v}\begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$ et $\vec{w}\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$.

1. Démontrer que les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ forment une base d'un plan.
2. Démontrer que les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forment une base de l'espace.

Exercice 4.M Avec les mêmes vecteurs que ceux définis dans l'exercice précédent ; d'après ledit exercice, les vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forment une base de l'espace.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{t}\begin{vmatrix} -1 \\ -15 \\ 16 \end{vmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.